Résolution d'un système linéaire à matrice tridiagonale : décomposition LU

extrait du livre : ***I. Danaila, F. Hecht, O. Pironneau, Simulation numérique en C++, Dunod, 2003***

Les matrices tridiagonales sont très faciles à factoriser par la méthode de Gauss. Si le système $AX = F$ est écrit sous la forme générale ($a_1 = c_n = 0$ par convention)

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ . \\ . \\ X_{n-1} \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

la matrice A peut se décomposer sous la forme $A = LU$, avec les matrices

$$L = \begin{pmatrix} b_1^* & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ a_2 & b_2^* & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & b_{n-1}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & a_n & b_n^* \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & c_1^* & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c_2^* & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 1 & c_{n-1}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En identifiant les coefficients, nous obtenons les récurrences suivantes pour le calcul des coefficients b^* et c^* :

$$\begin{cases} b_1^* = b_1 \\ c_1^* = c_1/b_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_k^* = b_k - a_k \cdot c_{k-1}^* \\ c_k^* = c_k/b_k^* \end{cases} \qquad k = 2 \ldots n. \tag{1.2}$$

Remarque 1.1 *Observons que la factorisation LU est possible si les coefficients b_k^* sont non-nuls, donc la matrice A doit être inversible.*

Le système peut être résolu maintenant en deux étapes $AX = F \Longrightarrow L\underbrace{UX}_{Y} = F$:

$$LY = f \Longrightarrow \begin{cases} Y_1 = f_1/b_1^* \\ Y_k = (f_k - a_k \cdot Y_{k-1})/b_k^*, \quad k = 2 \ldots n \end{cases} \tag{1.3}$$

$$UX = Y \Longrightarrow \begin{cases} X_n = Y_n \\ X_k = Y_k - c_k^* \cdot X_{k+1}, \quad k = (n-1) \ldots 1 \end{cases} \tag{1.4}$$