

1.5.2 L'équation des ondes

La propagation des ondes dans un milieu unidimensionnel homogène est décrite par l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{dans }]0, L[\times]0, T[, \quad (1.48)$$

avec $u(x, t)$ l'amplitude de l'onde en x à l'instant t . Le problème est bien posé si on se donne des conditions initiales

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u^1(x) \quad \forall x \in]0, L[$$

et des conditions aux bords, par exemple

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t \in]0, T[.$$

Solution analytique

Pour simplifier les calculs, nous supposons l'équation des ondes définie pour tout l'axe réel, $-\infty < x < +\infty$. De cette manière, les conditions aux bords n'interviendront plus dans l'expression de la solution analytique qui dépendra exclusivement des conditions initiales.

En introduisant les variables ($c = \text{const}$)

$$v = c \frac{\partial u}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (1.49)$$

l'équation initiale (1.48) peut s'écrire sous la forme d'un système différentiel du premier ordre :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}}_V + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -c \\ -c & 0 \end{pmatrix}}_A \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}}_V = 0 \iff \frac{\partial V}{\partial t} + A \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (1.50)$$

avec la condition initiale

$$V(x, 0) = V^0(x) = \begin{pmatrix} c(u^0)'(x) \\ u^1(x) \end{pmatrix}. \quad (1.51)$$

Si la matrice A est diagonalisable, nous pouvons la décomposer sous la forme $A = P\Lambda P^{-1}$, avec Λ la matrice diagonale contenant les valeurs propres λ_p et P la matrice unitaire ($P^{-1} = P^T$) formée par les vecteurs propres correspondants. Avec cette décomposition, le système différentiel devient :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + P\Lambda P^{-1} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \iff \frac{\partial(P^{-1}V)}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial(P^{-1}V)}{\partial x} = 0. \quad (1.52)$$

Si on note $W = P^{-1}V$, chaque composante du vecteur W va vérifier une équation de convection

$$\frac{\partial W_p}{\partial t} + \lambda_p \frac{\partial W_p}{\partial x} = 0, \quad W_p(x, 0) = (P^{-1}V^0)_p(x), \quad (1.53)$$

avec la solution

$$W_p(x, t) = (P^{-1}V^0)_p(x - \lambda_p t). \quad (1.54)$$

Une fois W calculé, la solution de l'équation du système (1.50) sera donnée par $V(x, t) = PW(x, t)$.



Définition 1.14

Ce type de calcul s'applique de manière générale aux systèmes différentiels linéaires hyperboliques, définis par

$$\frac{\partial V}{\partial t} + A \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad V(x, 0) = V^0(x),$$

avec $V \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrice diagonalisable avec des valeurs propres réelles. Les courbes $x(t)$ vérifiant l'équation différentielle $dx/dt = \lambda_p$ sont les courbes caractéristiques du système hyperbolique.

Appliquons cette démarche pour le système (1.50). Nous obtenons, successivement :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ -c & 0 \end{pmatrix} \implies \Lambda = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = P^T = P,$$

$$P^{-1}V^0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} c(u^0)'(x) + u^1(x) \\ c(u^0)'(x) - u^1(x) \end{pmatrix} \implies W(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} c(u^0)'(x + ct) + u^1(x + ct) \\ c(u^0)'(x - ct) - u^1(x - ct) \end{pmatrix}$$

et, finalement,

$$V(x, t) = PW(x, t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c [(u^0)'(x + ct) + (u^0)'(x - ct)] + u^1(x + ct) - u^1(x - ct) \\ c [(u^0)'(x + ct) - (u^0)'(x - ct)] + u^1(x + ct) + u^1(x - ct) \end{pmatrix}. \quad (1.55)$$

Suivant (1.49, 1.50), le vecteur $V(x, t)$ contient les expressions analytiques des dérivées partielles de $u(x, t)$. Par intégration directe, nous obtenons la solution de l'équation des ondes sous la forme :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[u^0(x + ct) + u^0(x - ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} u^1(\xi) d\xi \right]. \quad (1.56)$$



Remarque 1.21

Une solution directe de l'équation des ondes peut être obtenue en observant que, pour $c = \text{const}$, l'opérateur différentiel de l'équation (1.48) peut se factoriser sous la forme :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) u$$

ce qui indique, par analogie avec l'équation de convection, que la solution générale sera donnée par la superposition de deux ondes de même vitesse c , mais se propageant dans les directions $+x$ et $-x$:

$$u(x, t) = v_1(x - ct) + v_2(x + ct),$$

avec v_1, v_2 deux fonctions deux fois dérivables quelconques. En imposant les conditions initiales, nous obtenons la forme (1.56) de la solution analytique.

Pour finir cette analyse théorique, remarquons que les caractéristiques de l'équation des ondes pour $c = \text{const}$ sont les droites d'équations

$$\mathcal{C}_{1,2} : x \pm ct = \text{const},$$

et que les quantités conservées sur chaque caractéristique sont données par le vecteur $W = P^{-1}V$, donc,

$$\mathcal{Q}_{1,2} = c \frac{\partial u}{\partial x} \pm \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \text{avec} \quad \left. \frac{d\mathcal{Q}_1}{dt} \right|_{\mathcal{C}_1} = \left. \frac{d\mathcal{Q}_2}{dt} \right|_{\mathcal{C}_2} = 0.$$

Schéma centré

Après les développements utilisés pour l'équation de la chaleur, il nous semble maintenant *naturel* d'approcher la dérivée seconde par un schéma centré du type (1.26). Nous obtenons pour l'équation des ondes une discrétisation précise à l'ordre deux en temps et en espace en utilisant le schéma suivant :

$$\frac{1}{\delta t^2}(U_m^{n+1} - 2U_m^n + U_m^{n-1}) - \frac{c^2}{h^2}(U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n) = 0. \quad (1.57)$$

Pour étudier la stabilité du schéma, il va falloir évaluer le facteur d'amplification $\lambda(\phi) = \hat{U}^{(n+1)}/\hat{U}^{(n)}$. L'opérateur \mathcal{H} n'étant plus facile à estimer, comme pour les schémas explicites précédents, nous cherchons directement des solutions de type onde élémentaire

$$U^n = \hat{U}^{(n)} \left\{ e^{i\phi m} \right\}_{0 \leq m < M}$$

dans l'équation discrète. Il en résulte l'équation pour les amplitudes

$$\hat{U}^{(n+1)} - 2\hat{U}^{(n)} + \hat{U}^{(n-1)} = -\alpha^2 \hat{U}^{(n)}, \quad \text{avec} \quad \alpha = 2\frac{c \delta t}{h} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

Cette équation étant une récurrence du second ordre, le terme général de la suite sera $\hat{U}^{(n)} = r^n \hat{U}^{(0)}$, avec r solution de l'équation caractéristique :

$$r^2 - (2 - \alpha^2)r + 1 = 0.$$

Notons $\{r_1, r_2\}$ les racines de cette équation. Le facteur d'amplification devient $\lambda(\phi) \in \{r_1, r_2\}$ et la condition de stabilité (1.40) s'écrit $|r_{1,2}| \leq 1$. Comme $r_1 r_2 = 1$, il suffit que les racines soient complexes conjuguées pour avoir $|r_1| = |r_2| = 1$, ce qui revient à imposer que le discriminant de l'équation caractéristique soit négatif ou nul

$$\Delta_r = \alpha^2(\alpha^2 - 4) \leq 0 \iff |\alpha| \leq 2 \iff \left| \frac{c \delta t}{h} \right| \leq 1. \quad (1.58)$$

Nous avons obtenu la même condition CFL que pour l'équation de convection, ce qui était prévisible suite à la décomposition de la solution en deux ondes de vitesse de propagation $\pm c$. L'interprétation géométrique de cette condition, similaire à celle donnée pour l'équation de convection, est illustrée par la figure 1.8.

Une analyse plus rigoureuse (voir [?], p. 294) montre que la condition suffisante de stabilité du schéma (1.57) comporte une inégalité stricte

$$\left| \frac{c \delta t}{h} \right| < 1.$$

Il faut savoir qu'en pratique, on ne «pousse» jamais un schéma jusqu'à sa limite théorique de stabilité ; le pas de temps est calculé usuellement comme $\delta t = cfl \cdot (h/c)$, avec $cfl < 1$.



Remarque 1.22

Commentaires

L'équation des ondes nous a permis d'aborder un exemple simple de système hyperbolique. Nous avons constaté (figure 1.8) l'existence de deux caractéristiques distinctes $\mathcal{C}_{1,2}$ qui passent par le point de calcul $P(x_m, t_n)$. Si nous connaissons la solution à l'instant t_n , les caractéristiques vont transporter l'information (quantités $\mathcal{Q}_{1,2}$) qui nous permettront de calculer la solution au point P . Il existe dans le plan (x, t) une zone limitée de points dont les caractéristiques croisent \mathcal{C}_1 ou \mathcal{C}_2 , donc susceptibles d'influencer la solution au point P . Cette zone de dépendance (\mathcal{Z}_D) est représentée sur la figure 1.8 ; toute information venant d'un

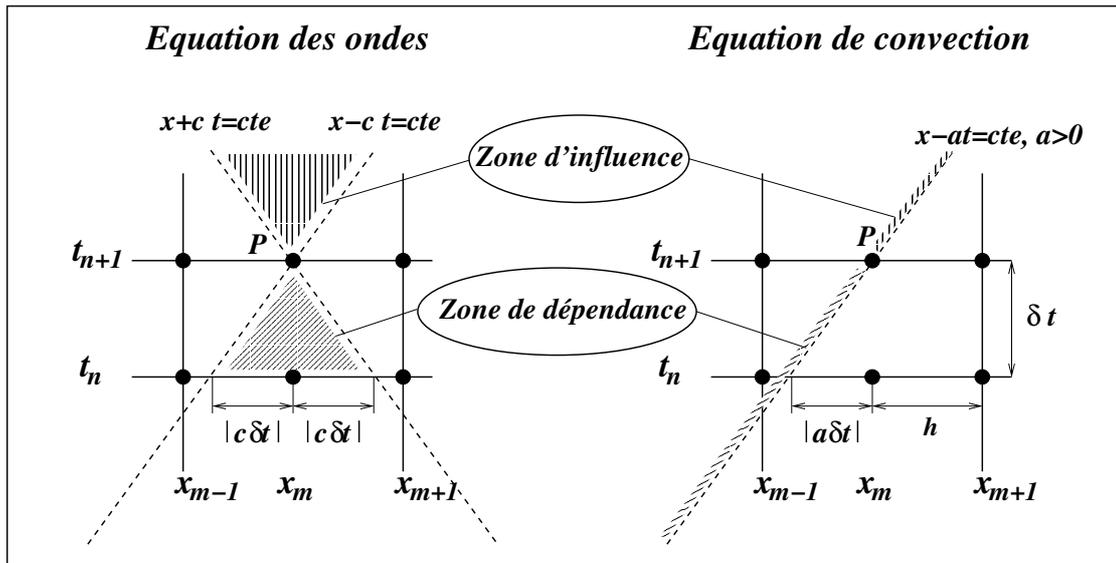


Figure 1.8 – Propagation de l’information dans les phénomènes décrits par des équations hyperboliques. Interprétation graphique de la condition CFL.

point extérieur à (Z_D) n’est pas «ressentie» au point P. Réciproquement, le point P ne peut influencer que les points situés dans la zone d’influence (Z_I) . Nous pouvons maintenant interpréter la restriction imposée par la condition CFL comme la nécessité d’utiliser pour le calcul de la solution au point P des informations venant de la zone de dépendance (Z_D) .

Pour l’équation de convection il existe une seule caractéristique et, par conséquent, les zones (Z_D) et (Z_I) seront restreintes aux deux demi-caractéristiques partant du point P (voir également la figure 1.8).



Remarque 1.23

|| D’un point de vue physique, la propagation par convection ou par ondes est très efficace pour des temps longs, car la distance parcourue par une perturbation est $L \sim ct$. Rappelons que les phénomènes de diffusion étaient caractérisés par une distance de propagation $L \sim \sqrt{\kappa t}$, ce qui les rendait efficace pour des temps courts.