Partiel 1: Méthode de décomposition de domaine
MM034: Informatique Scientifique

I. Danaila, F. Hecht, A. Perronnet, O. Pironneau

16 mars 2007

1 Partie théorique (1 heure)

Le but est d'utiliser les deux processeurs des nouveaux ordinateurs pour résoudre plus rapidement le problème modèle :

Trouver la fonction u telle que :

$$-u'' = f \quad \text{dans } \Omega =]L_1, L_2[\quad \text{et pour} \quad i = 1,2 \quad u(L_i) = g(L_i), \qquad (P)$$

où f et g sont deux fonctions régulières. Il est admis que la solution du problème existe et est $\mathcal{C}^2(\Omega)$.

Nous allons découper le domaine Ω en deux sous-domaines $\Omega_1 =]L_1, \ell_1[$ et $\Omega_2 =]\ell_2, L_2[$, et nous noterons $\Gamma_1 = \{\ell_1\}$ et $\Gamma_2 = \{\ell_2\}$. Tout le problème est le choix des conditions aux limites à mettre sur Γ_1 et Γ_2.

Nous allons résoudre ce problème avec la méthode des éléments finis,pour $i = 1,2$. Soit $\mathcal{T}_h$ un maillage de Ω tel que, pour $i = 1,2$, le point ℓ_i soit sommet de $\mathcal{T}_h$. Soit $\mathcal{T}_{i,h}$ le maillage de Ω_i formé des éléments de $\mathcal{T}_h$ inclus dans $\overline{\Omega_i}$.

On notera

$$X_h = \{v \in \mathcal{C}^0(\Omega) / \ \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad v_{|K} \in P_1(K)\}, \quad \text{et} \quad X_{0h} = X_h \cap H_0^1(\Omega)$$

et pour $i = 1,2$

$$X_{i,h} = \{v \in \mathcal{C}^0(\Omega_i) / \ \forall K \in \mathcal{T}_{i,h}, \quad v_{|K} \in P_1(K)\} \quad \text{et} \quad X_{i,0h} = X_{i,h} \cap H_0^1(\Omega_i)$$

Nous ne résolvons que des problèmes avec condition de Dirichlet aux deux bords.

Méthode sans recouvrement , on a $L_1 < \ell_1 = \ell_2 < L_2$.
Nous allons cherché la condition oubliée en $\ell = \ell_1 = \ell_2$, ce point aura pour numéro l dans le maillage $\mathcal{T}_h$.

Q1) Soit ξ un nombre donné, qui est la valeur en ℓ inconnue.
Pour $i = 1,2$, soit $u_{\xi,ih} \in X_{i,h}$ telle que $u_{\xi,ih}(L_i) = g(L_i)$ et $u_{\xi,ih}(\ell) = \xi$ et où

$$\forall v_{ih} \in X_{i,0h} \qquad \int_{\Omega_i} u'_{\xi,ih} v'_{ih} dx = \int_{\Omega_i} f v_{ih} dx,$$

et soit $u_{\xi,h} \in X_h$ telle que $u_{\xi,h}(L_i) = g(L_i)$ et $u_{\xi,h}(\ell) = \xi$ et où

$$\forall v_h \in \tilde{X}_{0h} = \{v \in X_{0h} / v(\ell) = 0\}, \qquad \int_\Omega u'_{\xi,h} v'_h dx = \int_\Omega f v_h dx$$

Prouver que pour $i = 1, 2$, on a $u_{\xi,h|\Omega_i} = u_{\xi,ih}$.

Q2) Montrez de l'application

$$\Psi : \mathbb{R} \times X_{0h} : (\xi, v_h) \mapsto \Psi(\xi, v_h) = \int_\Omega u'_{\xi,h} v'_h dx - \int_\Omega f v_h dx$$

est affine en ξ et linéaire en v. Et montrer que si pour un ξ, on a on

$$\forall v_h \in X_{0h}, \qquad \Psi(\xi, v_h) = 0,$$

alors $u_{\xi,h}$ est solution du problème initial discrétisé, c'est-à-dire :

$$\forall v_h \in X_{0h}, \qquad \int_\Omega u'_{\xi,h} v'_h dx = \int_\Omega f v_h dx \quad \text{et pour } i = 1, 2 \quad u_{\xi,h}(L_i) = g(L_i).$$

Q3) Montrer que

$$\forall v_h \in X_{0h}, \qquad \Psi(\xi, v_h) = v_h(\ell) \Big(\int_\Omega u'_{\xi,h} {w_h^l}' dx - \int_\Omega f w_h^l dx \Big).$$

où w_h^l est la fonction de base de X_{0h} associée au point ℓ de numéro l.

Q4) Notons

$$G(\xi) = \int_\Omega u'_{\xi,h} {w_h^l}' dx - \int_\Omega f w_h^l dx,$$

monter que G est une fonction affine, que l'on peut donc écrire sous la forme $G(\xi) = \alpha\xi - \beta$. Calculer α et β en résolvant 2×2 problèmes discrets sur les Ω_i, et reconstruire la solution du problème original à partir de ces 2×2 solutions.