Partiel 1: Méthode de décomposition de domaine
MM034: Informatique Scientifique

I. Danaila, F. Hecht, A. Perronnet, O. Pironneau

2 mars 2008

1 Partie théorique (1 heure)

Le but est d'utiliser les deux processeurs des nouveaux ordinateurs pour résoudre plus rapidement le problème modèle :

Trouver la fonction u telle que :

$$-u'' = f \quad \text{dans } \Omega =]L_1, L_2[\quad \text{et pour} \quad i = 1,2 \quad u(L_i) = g(L_i), \tag{P}$$

où f et g sont deux fonctions régulières. Il est admis que la solution du problème existe et est $\mathcal{C}^2(\Omega)$.

Nous allons découper le domaine Ω en deux sous-domaines $\Omega_1 =]L_1, \ell_1[$ et $\Omega_2 =]\ell_2, L_2[$, et nous noterons $\Gamma_1 = \{\ell_1\}$ et $\Gamma_2 = \{\ell_2\}$. Tout le problème est le choix des conditions aux limites à mettre sur Γ_1 et Γ_2.

Nous allons résoudre ce problème avec la méthode des éléments finis,pour $i = 1,2$. Soit $\mathcal{T}_h$ un maillage de Ω tel que, pour $i = 1,2$, le point ℓ_i soit sommet de $\mathcal{T}_h$. Soit $\mathcal{T}_{i,h}$ le maillage de Ω_i formé des éléments de $\mathcal{T}_h$ inclus dans $\overline{\Omega_i}$.

On notera

$$X_h = \{v \in \mathcal{C}^0(\Omega)/\ \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad v_{|K} \in P_1(K)\}, \quad \text{et} \quad X_{0h} = X_h \cap H^1_0(\Omega)$$

et pour $i = 1,2$

$$X_{i,h} = \{v \in \mathcal{C}^0(\Omega_i)/\ \forall K \in \mathcal{T}_{i,h}, \quad v_{|K} \in P_1(K)\} \quad \text{et} \quad X_{i,0h} = X_{i,h} \cap H^1_0(\Omega_i)$$

Nous ne résolvons que des problèmes avec condition de Dirichlet aux deux bords.

Méthode avec recouvrement On a $L_1 < \ell_1 < \ell_2 < L_2$. Le problème est donc de trouver les deux conditions aux limites $\xi_i = u_i(\ell_i)$ pour $i = 1,2$.

Q1) Pour $i = 1,2$, montrer que $u_{\xi_i,i} \in H^1(\Omega_i)$ la solution du problème

$$u_{\xi_i,i}{}'' = f, \qquad u_{\xi_i,i}(L_i) = g_i, \quad u_{\xi_i,i}(l_i) = \xi_i$$

existe et est unique.

Q2) Montrer que $u_{\xi_i,i}$ peut s'écrire sous la forme $u_{\xi_i,i} = w_{0,i} + \xi w_{1,i}$. où les fonctions $w_{0,i} \in H^1(\Omega_i)$ et $w_{1,i} \in H^1(\Omega_i)$ tel que

$$\begin{array}{lll} w''_{0,i} &= f, \qquad w_{0,i}(L_i) = g_i, & w_{0,i}(l_i) = 0 \\ w''_{1,i} &= 0, \qquad w_{1,i}(L_i) = 0, & w_{1,i}(l_i) = 1 \end{array} \tag{1}$$

Q3) Ecrire un système linéaire en ξ_i pour que les deux solution $u_{\xi_1,1}$ et $u_{\xi_2,2}$ soit égale sur $]\ell_1, \ell_2[$. Ce système linéaire ne dépend que de ℓ_i et des fonctions $w_{0,i}, w_{1,i}$, pour $i = 1, 2$. Montrer que la solution de ce système linéaire est telle que $u_{\xi_i,i} = u_{|\Omega_i}$ où u est la solution du initial problème (1).

Q4) Calculer analytiquement les fonctions $w_{1,i}$ pour $i = 1, 2$.

Q5) Décrire une méthode numérique pour approcher les deux fonctions $w_{0,i}$ ($i = 1, 2$)

Q6) Décrire un algorithme pour résoudre le problème problème initial en utilisant les deux sous domaines Ω_i, i=1,2.

Q7) On propose l'algorithme de Schwarz sur le problème continu, qui correspond à la récurrence suivante :

- Initialisation : soit u_i^0 (i=1,2) deux fonctions réelles données de Ω_i.
- Héritage : pour $i = 1, 2$, la fonction u_i^{n+1} est la solution du problème :

$$-u_i^{n+1''} = f \quad \text{dans } \Omega_i \quad \text{et} \quad u_i^{n+1}(L_i) = g(L_i), \quad u_i^{n+1}(\ell_i) = u_j^n(\ell_i)$$

où $j = 3 - i$ est le numéro de l'autre sous domaine.

Montrer que l'algorithme converge pour cela vous pourrez montrez en utilisant expression des $w_{1,i}$ de la question 4 que

$$|u_i^{n+1}(\ell_i) - u_i^n(\ell_i)| \leq \alpha_i |u_i^n(\ell_i) - u_i^{n-1}(\ell_i)|, \qquad \text{avec} \quad \alpha_i < 1$$

.

Q8) Montrer que u_i^∞ est la solution du problème initial (P) sur Ω_i. Pour cela, il suffit de chercher de quel problème est solution $u_1^\infty - u_2^\infty$ sur $]\ell_1, \ell_2[$.