Nous rappelons que lors de la soutenance de ce projet vous devez présenter un **rapport écrit sous LateX**. *Le rapport doit décrire les développements analytiques faits et illustrer les résultats obtenus avec des figures générées sous Gnuplot. Il n'est pas nécessaire d'inclure les listings des programmes C++ dans le rapport – ils seront présentés séparément.*

Projet 1 : Résolution de l'équation des ondes 1D

Problème physique et analyse mathématique

Les oscillations d'une corde élastique sont décrites par l'équation des ondes

$$\partial^2_{tt} u(x,t) - c^2 \partial^2_{xx} u(x,t) = 0, \quad t > 0, \tag{1}$$

où la vitesse de propagation c dépend de la tension τ dans la corde et de sa densité linéaire ρ suivant la loi : $c = \sqrt{\tau/\rho}$. Par la suite, on considère $c = const$.

Le problème de Cauchy correspondant nécessite deux conditions initiales

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x,0) = u_1(x). \tag{2}$$

Q1) Caractéristiques : Vérifier que les quantités $\mathcal{Q}_{1,2} = c\,\frac{\partial u}{\partial x} \pm \frac{\partial u}{\partial t}$ sont conservées sur les courbes d'équations $\mathcal{C}_{1,2} : x \pm ct = const$, c'est-à-dire

$$\left.\frac{d\mathcal{Q}_1}{dt}\right|_{\mathcal{C}_1} = \left.\frac{d\mathcal{Q}_2}{dt}\right|_{\mathcal{C}_2} = 0$$

Les droites $\mathcal{C}_{1,2}$ sont les *courbes caractéristiques* de l'équation des ondes.

Q2) Solution exacte pour la corde finie : Considérons une corde de longueur ℓ finie, fixée aux extrémités. Les conditions aux limites correspondantes sont :

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \quad \forall t > 0. \tag{3}$$

Vérifier que la solution exacte pour la corde vibrante finie peut s'écrire sous la forme :

$$u(x,t) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} [A_k \cos(\frac{k\pi}{\ell} ct) + B_k \sin(\frac{k\pi}{\ell} ct)]\phi_k(x), \qquad \phi_k(x) = \sin(\frac{k\pi}{\ell} x). \tag{4}$$

Trouver que

$$A_k = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell u_0(x)\phi_k(x)dx, \qquad B_k = \frac{2}{k\pi c} \int_0^\ell u_1(x)\phi_k(x)dx. \tag{5}$$

Résolution numérique

Pour la résolution numérique, le domaine de définition du problème sera discrétisé
en espace

$$[0,\ell] = \bigcup_{j=0}^{M-2} [x_j, x_j + h],\ x_j = j\,\delta x,\ j = 0,1,\ldots,M-1,\ \delta x = \ell/(M-1), \tag{6}$$

et *en temps*

$$[0,t_{max}] = \bigcup_{n=0}^{N-2} [t_n, t_n + \delta t],\ t_n = n\delta t,\ n = 0,1,\ldots,N-1,\ \delta t = T/(N-1). \tag{7}$$

On note $u_j^n = u(x_j, t_n)$. Les valeurs numériques calculées aux mêmes points (x_j, t_n) seront notées par U_j^n.

Considérons le schéma aux différences finies suivant pour résoudre (1) :

$$\frac{1}{\delta t^2}(U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}) - c^2\mathcal{D}\left[\theta U_j^{n+1} + (1-2\theta)U_j^n + \theta U_j^{n-1}\right] = 0, \tag{8}$$

avec l'opérateur linéaire résultant par une discrétisation centrée de la dérivée seconde en espace :

$$\mathcal{D}\left[U_j\right] = (U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1})/\delta x^2. \tag{9}$$

Q3) Schéma explicite : Le schéma explicite est obtenu en prenant $\theta = 0$ dans (8). Ecrire ce schéma et justifier qu'il est précis à l'ordre deux en temps et en espace. En représentant graphiquement dans le plan (x, t) les caractéristiques (cf. question Q1) qui passent par le point (x_j, t_n), justifier la condition de stabilité suivante pour le schéma explicite :

$$\sigma = \left|\frac{c\,\delta t}{\delta x}\right| \leq 1 \tag{10}$$

Ecrire le programme C++ qui utilise l'algorithme de résolution suivant :

- Connaissant les conditions initiales $u_0(x_j)$ et $u_1(x_j)$, on calcule U_j^0, U_j^1 par

$$U_j^0 = u_0(x_j), \quad U_j^1 = U_j^0 + \delta t\, u_1(x_j) \tag{11}$$

- Pour $n \geq 1$, on calcule :

$$U_j^{n+1} = 2(1-\sigma^2)U_j^n + \sigma^2(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - U_j^{n-1}. \tag{12}$$

Attention, il n'est pas nécessaire d'utiliser pour la programmation une matrice $U[j,n]$. La solution numérique sera représentée par trois vecteurs, par exemple $U0[j]$ pour U_j^{n-1}, $U1[j]$ pour U_j^n, $U2[j]$ pour U_j^{n+1} ; ces vecteurs seront actualisés à chaque nouveau pas de temps. Si nécessaire, les valeurs de la solution correspondant à un instant de temps donné seront sauvegardées dans un fichier.

Utiliser les paramètres suivants :

$$c = 2, \ell = 1, M = 101, \delta x = \frac{\ell}{(M-1)}, \sigma = 0.8, \delta t = \frac{\sigma \delta x}{c}, \quad u_0(x) = \sin(\frac{\pi}{\ell}x) + \frac{1}{4}\sin(10\frac{\pi}{\ell}x), \quad u_1(x) = 0.$$

Tracer la solution exacte (quelle est sa formule analytique ?) et la solution numérique pour plusieurs instants de temps sur une période de temps $T = 2\ell/c$ (par exemple, pour $t = 0, T/4, T/2, 3T/4, T$).

Q4) Schéma implicite : Reprendre le schéma (8) pour $\theta \neq 0$. Ecrire le programme C++ qui utilise ce schéma (θ est un paramètre introduit par l'utilisateur) pour résoudre l'équation des ondes avec les paramètres de la question Q3. Application numérique : $\theta = 1/4$.

Comparer avec les résultats obtenus avec le schéma explicite. Que se passe-t-il si on prend des valeurs $\sigma > 1$ pour les deux schémas (explicite et implicite) ? Commenter.

Q5)(facultative) Schéma implicite : Tester aussi le schéma implicite suivant qui est inconditionnellement stable et à l'ordre un en temps :

$$\frac{1}{\delta t^2}(U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}) - c^2\mathcal{D}\left[U_j^{n+1}\right] = 0. \tag{13}$$

Commenter les résultats.