Projet 2 : Résolution de l'équation des ondes 2D
I. Danaila et F. Hecht

Problème physique et modélisation mathématique

Nous nous proposons de simuler les vagues créées par un caillou jeté dans un lac carré $\Omega = (-L, L)^2$, de frontière Γ. Après un bref instant, le caillou crée une vague d'amplitude $u^0(x)$ qui sera pour nous la condition initiale pour $t = 0$; ensuite le phénomène est linéaire et l'amplitude de la vague au point x à l'instant t vérifie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t \in (0, T). \tag{1}$$

Si la vitesse de la vague initiale est nulle et si la réflexion sur les bords est parfaite, alors nous définissons pour l'équation (1)

– **les conditions initiales**

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \; \forall x \in \Omega \tag{2}$$

– et **les conditions aux limites**

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = 0, \; \forall x \in \Gamma, \; t \in (0, T). \tag{3}$$

Pour résoudre numériquement cette équation aux dérivées partielles, nous commençons par discrétiser l'intervalle $[0, T]$

$$[0, T] = \bigcup_{n=0}^{N-2} [t_n, t_n + \delta t], \; t_n = n\delta t, \; n = 0, 1, \ldots, N-1, \; \delta t = T/(N-1), \tag{4}$$

et approcher la dérivée seconde en temps par un schéma aux différences finies centré en temps :

$$\frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\delta t^2} - \Delta U^n = 0. \tag{5}$$

Nous reconnaissons le schéma explicite utilisé pour le projet 1 avec la discrétisation spatiale du domaine 1D par des différences finies.

Nous utiliserons dans ce projet une discrétisation du domaine spatial bidimensionnel Ω par la méthode des éléments finis P^1. Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation de Ω, et V_h l'espace des fonctions continues affines par morceaux sur la triangulation : la solution U sera approchée par $u_h \in V_h$. Pour simplifier la présentation, nous omettons par la suite l'indice h.

La formulation variationnelle de (5) s'écrit : trouver $u^{n+1} \in V_h$ la solution de

$$\forall w \in V_h : \quad \int_\Omega w \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\delta t^2} + \int_\Omega \nabla w \nabla u^n = 0 \tag{6}$$

$$u^0 = \Pi_h u^0, \quad u^1 = u^0, \quad \text{où } \Pi_h \text{ est l'opérateur d'interpolation } P^1 \text{ sur } V_h. \tag{7}$$

Pour les applications numériques on choisira

$$L = 5, \quad T = 6, \quad u^0(x) = \exp(-2(x^2 + y^2)). \tag{8}$$

Q1 : Résolution numérique avec FreeFem++

(a) Construire avec FreeFem++ une triangulation du carré $[-L, L] \times [-L, L]$, avec $L = 5$. On définit successivement (voir figure 1) les frontières $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ du carré en respectant le sens trigonométrique de parcours (instruction `border`) ; le maillage sera généré avec l'instruction `buildmesh`. Utilisez $n = 50$ points sur chaque frontière.

(b) Ecrire le script FreeFem++ qui résout l'équation des ondes sur ce domaine en utilisant le schéma explicite (7). On imposera partout des conditions aux limites de Neumann $\partial u/\partial n = 0$.
Considérer $N = 101$ **pas de temps.**

(c) Ecrire la formulation variationnelle pour le *thêta*-schéma :

$$\frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\delta t^2} - \Delta \left[\theta U^{n+1} + (1 - 2\theta)U^n + \theta U^{n-1}\right] = 0. \tag{9}$$

Retrouver les résultats précédents pour $\theta = 0$.
Tester le programme pour $\theta = 0.25$ et $\theta = 1$ (schéma implicite).

(d) Modifier le script FreeFem++ (*thêta*-schéma) pour imposer une condition de Dirichlet $u = 0$ sur la frontière Γ_4 (voir figure 1). Comparer avec les résultats obtenus à la question (c).

(e) Modifier le script FreeFem++ pour imposer une condition de Robin (ou Fourier) $\partial u/\partial n + \alpha u = 0$ sur la frontière Γ_4 (voir figure 1). Etudier l'influence de la valeur de la constante α sur les résultats.

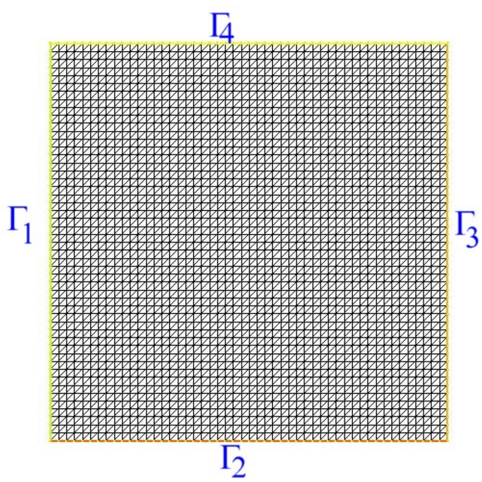

FIGURE 1 – Triangulation du carré.

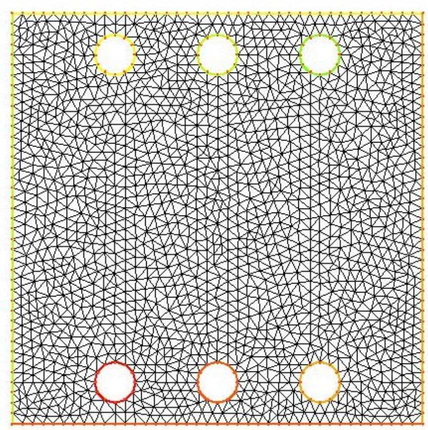

FIGURE 2 – Triangulation du domaine avec six trous.

(f) Considérer un domaine avec six obstacles (trous) circulaires (voir figure 2). Générer le maillage en optimisant la forme des triangles du maillage (le rapport l/n doit être le même pour chaque morceau de frontière de longueur l sur lequel on distribue n points de discrétisation).

Résoudre l'équation des ondes avec les conditions aux limites suivantes :
$u = 0$ sur Γ_4,
$\partial u/\partial n = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$,
$\partial u/\partial n + \alpha u = 0$ sur toutes les frontières Γ_c des obstacles circulaires.

Q2 : Résolution numérique en C++

Considérons pour commencer le schéma explicite (7).
Pour la résolution numérique en C++, il faut d'abord parcourir les étapes théoriques suivantes :

- à partir de la formulation variationnelle (7), écrire le système linéaire $A*U^{n+1} = B$, obtenu en considérant successivement $w = w_i$, pour tous les sommets de la triangulation $i = 1, 2, ..., n_v$.
- afin d'utiliser l'algorithme du gradient conjugué, écrire d'abord la formule pour le vecteur résultat g du produit $A * X$, avec X un vecteur quelconque de dimension n_v.
  (Développer l'expression $g_i = \sum_j A_{ij} X_j$.)
- formuler sur papier l'algorithme qui permet de calculer g du point précédent en assemblant es contributions *locales*, calculées sur chaque triangle T_k, pour $k = 1, 2, ..., n_t$.

L'implémentation des développements théoriques précédents suivra l'exemple donné sur le site Web du cours, semaine 7, exercice 4, qui montre comment utiliser le gradient conjugué pour résoudre $A*U = B$, en définissant seulement le résultat du produit $A * X$, avec X quelconque.

(a) Ecrire le programme C++ qui résout l'équation des ondes en utilisant le schéma explicite (7). Utiliser les mêmes paramètres, la même condition initiale et la maillage généré pour la question **Q1**, point b).
Comparer avec les résultats obtenus avec FreeFem++.

(b) Ecrire la formulation variationnelle pour le *thêta*-schéma :

$$\frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\delta t^2} - \Delta \left[\theta U^{n+1} + (1 - 2\theta)U^n + \theta U^{n-1}\right] = 0. \qquad (10)$$

Ecrire ensuite le programme C++ correspondant.
Retrouver les résultats précédents pour $\theta = 0$.
Tester le script pour $\theta = 0.25$ et $\theta = 1$ (schéma implicite).

(c) Modifier le programme C++ (*thêta*-schéma) pour imposer une condition de Dirichlet $u = 0$ sur la frontière Γ_4 (voir figure 1). Comparer avec les résultats obtenus à la question (c).

(d) Modifier le script FreeFem++ pour imposer une condition de Robin (ou Fourier) $\partial u/\partial n + \alpha u = 0$ sur la frontière Γ_4 (voir figure 1). Etudier l'influence de la valeur de la constante α sur les résultats.

Pour toutes ces questions, comparer les résultats obtenus avec vos programmes C++ avec les résultats obtenus avec FreeFem++. Tracer des graphiques en superposant les deux solutions (voir le site Web pour plus d'indications).

Deuxième partie

Q3 Considérons le problème correspondant à la question **Q2, point d** : l'équation des ondes sera résolue sur le domaine représenté sur la figure 1 avec une condition de Robin $\partial u / \partial n + \alpha u = 0$ sur la frontière Γ_4. Nous nous proposons d'étudier la sensibilité de la solution par rapport au paramètre α.

Calculer la dérivée de la solution u par rapport au paramètre α,

1. par différences finies,
2. et par différenciation automatique.

Afficher la valeur de la dérivée $\left(\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=10}$ au point P de coordonnées $x = 0$ et $y = 0.9\, L$.
Comparer les deux valeurs.

Q4 Utiliser OpenGl/GLUT pour faire une représentation dynamique (évolution en temps) de la solution numérique.

Q5 Dans le but d'avoir une interface utilisateur conviviale, écrire un programme en Java qui permet à l'utilisateur d'introduire les paramètres du calcul :
les valeurs de L, T, N, M, α,
le choix du schéma,
le nom du fichier maillage,
L'interface permettra également (boutons en bascule) de choisir entre le calcul direct et le calcul de sensibilité (différenciation automatique) et de lancer le calcul (exécutable C++).

Q6 (facultative) Intégrer dans l'interface Java l'interpréteur de formules présenté en cours (semaine 12) pour pouvoir introduire des fonctions analytiques : il servira, par exemple, à interpréter la formule pour la condition initiale 8.

Vous trouverez sur la page Web du cours plus d'indications, ainsi que les programmes qui vous serviront comme base de départ.