

Simulation numérique de l'injection gaz-gaz à masse volumique variable

Sonia BENTEBOULA^{1,2}, Ionut DANAILA²

¹ Laboratoire d'études des transferts d'énergie et de matière, Université de Marne-la-Vallée Bât. Lavoisier, Cité Descartes, Rue Galilée, Champs-sur-Marne. (bente@ann.jussieu.fr)

² Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris. (danaila@ann.jussieu.fr)

Résumé – L'écoulement gazeux généré pendant la phase d'injection dans une chambre de combustion est étudié théoriquement et numériquement. Un nouveau code de calcul a été développé pour la résolution des équations de Navier-Stokes 3D en coordonnées cylindriques, avec l'hypothèse d'un écoulement réactif à faible nombre de Mach. L'étude présente en détail les caractéristiques (circulation, impulsion, distribution de vorticité) du tourbillon de tête en fonction du rapport de températures entre le jet et le fluide ambiant.

Nomenclature

T	température	(r, θ, z)	coordonnées cylindriques	indices	v vortex
ρ	masse volumique	t	temps adimensionné		j jet
α	rapport T_j/T_a	ω	vorticité		a milieu ambiant

1 Introduction

L'injection de carburant dans un moteur à injection directe s'effectue par un injecteur produisant un jet de gouttes. La modélisation du spray ainsi formé constitue une composante essentielle des codes industriels simulant la combustion dans ce type de moteurs. Le succès d'un tel modèle est conditionné par le calcul correct de l'écoulement de la phase gazeuse et, en particulier, par la prédiction des caractéristiques du tourbillon de tête qui se forme pendant l'injection.

Dans la présente étude, nous considérons l'écoulement obtenu par l'injection de gaz (  température T_j) dans un milieu au repos (  température T_a). Ce type d'écoulement a comme caractéristique universelle (indépendante de la vitesse d'injection) la formation d'un tourbillon de tête (anneau de vorticité ou *vortex ring* en anglais). L'anneau de vorticité constitue un écoulement fondamental de la Mécanique des fluides, analysé théoriquement dans les ouvrages de référence (pour un article de synthèse récent sur le sujet, voir [9]). Paradoxalement, malgré l'intérêt pratique, peu de résultats existent dans la littérature sur l'influence du rapport $\alpha = T_j/T_a$ sur les caractéristiques du tourbillon (distribution de vorticité, impulsion, trajectoire, etc.). Nous aborderons ce sujet d'un point de vue théorique et numérique.

L'écoulement considéré étant laminaire (faibles vitesses d'injection et faibles nombres de Mach), il est accessible à la simulation numérique directe (DNS). L'utilisation d'un code Navier-Stokes compressible pour ce type d'écoulement pose le problème de la résolution des ondes acoustiques ; en théorie, un pas de temps infiniment petit est nécessaire dans la limite $M \rightarrow 0$. Une approche intermédiaire entre la formulation compressible et celle incompressible des équations de Navier-Stokes est l'approximation à faible nombre de Mach proposée par Majda et Sethian [5]. L'idée

générale est d'éliminer les ondes acoustiques tout en gardant les ondes d'entropie et de vortacité et en tenant ainsi compte des variations de la masse volumique (due à la chaleur produite par les réactions chimiques, par exemple). Plusieurs approches de ce type existent dans la littérature (voir, par exemple, [4], [5], [1]).

Le formalisme mathématique de l'approximation à faible nombre de Mach est présenté d'abord. Nous décrivons ensuite l'algorithme et le schéma numérique développés. Les résultats sur l'anneau tourbillonnaire à masse volumique variable ($\alpha \neq 1$) sont analysés qualitativement et quantitativement et comparés au cas $\alpha = 1$, bien documenté dans la littérature.

2 Équations de Navier-Stokes à faible nombre de Mach

L'écoulement d'un jet visqueux à masse volumique variable sera décrit par les équations de Navier-Stokes (N-S) instationnaires, dérivées dans l'approximation à faible nombre de Mach. Le point de départ pour les développements analytiques est constitué par les équations de N-S compressibles, écrites sous forme adimensionnelle. Les paramètres de similitude mis en évidence sont les nombres de Reynolds, Mach, Prandtl et Schmidt, respectivement, définis par rapport aux grandeurs (identifiées par l'indice j) caractérisant l'injection :

$$Re = \rho_j V_j D_j / \mu_j, \quad M = V_j / \sqrt{\gamma r T_j}, \quad Pr = \mu_j C_p / \lambda_j, \quad Sc = \mu_j / \rho_j D_j.$$

Les variables primitives sont ensuite développées en série de puissances du petit paramètre $\epsilon = \gamma M^2 \ll 1$:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \epsilon \rho_1 + \dots \\ v &= v_0 + \epsilon v_1 + \dots \\ T &= T_0 + \epsilon T_1 + \dots \\ p &= \frac{\rho T}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \rho_0 T_0 + \rho_1 T_0 + \rho_0 T_1 + \dots = \frac{1}{\epsilon} p_0 + p_1 + \dots \\ \rho e &= \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{v^2}{2} = \frac{1}{\epsilon} \frac{p_0}{\gamma - 1} + \frac{p_1}{\gamma - 1} + \rho_1 \frac{v_0^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

Les termes en ϵ^{-1} existent dans les équations de quantité de mouvement et d'énergie qui s'écrivent à cet ordre :

$$\nabla p_0 = 0, \quad \text{et, respectivement,} \quad \frac{\partial p_0}{\partial t} + \gamma \nabla(p_0 \vec{v}_0) = \frac{\gamma}{Re Pr} \nabla(\mu \nabla T_0). \quad (1)$$

Une première simplification est obtenue : la pression thermodynamique p_0 est constante en espace. De plus, pour les écoulements ouverts considérés dans cette étude, nous pouvons supposer que la pression p_0 est constante en temps également (les fluctuations de pression dynamique p_1 sont négligeables par rapport à p_0).

Les termes en ϵ^0 permettent d'obtenir des équations pour les variables (ρ_0, \vec{v}_0, p_1) identiques aux équations de continuité et de quantité de mouvement originales. Nous présentons ici ces équations en coordonnées cylindriques, écrites sous la forme conservative en utilisant les variables $(q_\theta = v_\theta, q_r = r \cdot v_r, q_z = v_z, p_1)$ qui permettent de contourner la singularité introduite par l'axe (les indices 0 seront omis pour simplifier la notation). Le système d'équations à résoudre pour trouver les inconnues $(\rho, q_r, q_\theta, q_z, T, p_1)$ est formé par :

- l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \rho q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho q_r}{\partial r} + r \frac{\partial \rho q_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (2)$$

- les équations de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{Dt}(\rho q_\theta) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p_1}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{z\theta}) \right] \\
 \frac{D}{Dt}(\rho q_r) &= -r \frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta r}) + r \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zr}) - \tau_{\theta\theta} \right] \\
 \frac{D}{Dt}(\rho q_z) &= -\frac{\partial p_1}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta z}) + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right]
 \end{aligned} \tag{3}$$

avec τ le tenseur des contraintes visqueuses et p_1 la pression dynamique.

- l'équation de conservation de l'énergie (écrite à partir de (1) et en utilisant l'équation de continuité – voir aussi [1]) :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} &= - \left[\frac{q_\theta}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \frac{q_r}{r} \frac{\partial \rho}{\partial r} + q_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{T} \frac{1}{RePr} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4}$$

- l'équation d'état : $p_0 = \rho T = 1$.

L'anneau tourbillonnaire est obtenu par un mécanisme piston-cylindre. En contrôlant le mouvement du piston, le profil de vitesse axiale imposé à l'entrée est $V_{in}(r, t) = V_j g(r) f(t)$, où

$$g(r) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \tanh \left[\frac{1}{4} \frac{R_j}{\Theta_j} \left(\frac{R_j}{r} - \frac{r}{R_j} \right) \right] \right\} \tag{5}$$

est le profil spatial qui approche les profils mesurés expérimentalement (Θ_j est l'épaisseur de quantité de mouvement) et $f(t)$ décrit le programme d'injection (voir [3] pour les détails). Les variations de température et de masse volumique à l'entrée sont décrites par :

$$T_{in}(\alpha, r, t) = T_a [1 + (\alpha - 1) g(r) f(t)], \quad \rho_{in}(\alpha, r, t) = 1/T_{in}(\alpha, r, t). \tag{6}$$

Les conditions aux limites utilisées sont : périodicité suivant la direction θ , une condition d'adhérence sur q_r et de glissement sur les deux composantes q_θ et q_z aux frontières latérales. À la sortie on utilise une condition non réfléchissante de type libre convection (appelée condition d'Orlanski). Pour la masse volumique ρ , on impose $\partial \rho / \partial r = 0$ à la frontière latérale et une condition de libre convection à la sortie du domaine de calcul.

3 Méthode numérique

La méthode à pas de temps fractionné, généralement utilisée pour résoudre les équations de Navier-Stokes incompressibles, a été étendue pour les équations à faible nombre de Mach. La discrétisation spatiale utilise un schéma aux différences finies centrées, d'ordre deux, dans un maillage cylindrique décalé. Deux algorithmes ont été développés, utilisant les schémas temporels suivants :

Le schéma explicite d'Adams-Bashforth

L'équation (4) est intégrée d'abord avec un schéma d'Adams-Bashforth (voir aussi [1]) :

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} = \left[\frac{3}{2} F^n - \frac{1}{2} F^{n-1} \right], \quad \text{avec} \quad F = -\vec{v} \cdot \nabla \cdot \rho - \frac{1}{T} \left[\frac{1}{RePr} \nabla \cdot (\mu \nabla T) \right], \tag{7}$$

pour obtenir ρ^{n+1} . Ensuite, on intègre les équations de quantité de mouvement pour chaque composante q_c , $c = \theta, r, z$

$$\frac{\rho^{n+1} \hat{q}_c - \rho^n q_c^n}{\Delta t} = \left[\frac{3}{2} G_c^n - \frac{1}{2} G_c^{n-1} - \mathcal{G}_c p^n \right], \quad \text{avec} \quad G^n = [\mathcal{H}^n + \mathcal{A}_c (\mu^n q_c^n)].$$

Comme notations, \mathcal{H} désigne les termes convectifs et de couplage, \mathcal{A}_c l'opérateur de diffusion et $\mathcal{G}_c, \mathcal{D}, \mathcal{L}$ les opérateurs gradient, divergence et laplacien. Le champ intermédiaire $\rho^{n+1}\hat{q}_c$ ainsi obtenu est corrigé par

$$(\rho q_c)^{n+1} - \rho^{n+1}\hat{q}_c = -\Delta t \mathcal{G}_c \Phi, \quad (8)$$

afin d'obtenir le champ $(\rho q_c)^{n+1}$ qui vérifie l'équation de continuité (2). Cette condition imposée, on obtient une équation de Poisson :

$$\mathcal{L}\Phi = \frac{1}{\Delta t} \left[\mathcal{D}(\rho^{n+1}\hat{q}_c) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)^{n+1} \right]. \quad (9)$$

qui est résolue en utilisant la bibliothèque Fishpack.

Finalement, on réactualise le champ de pression par $\mathcal{G}_c p^{n+1} = \mathcal{G}_c p^n + \mathcal{G}_c \Phi - \frac{\Delta t}{2} \mathcal{A}_c (q_c^{n+1} - \hat{q}_c)$, ainsi que la température par la loi d'état $T^{n+1} = 1/\rho^{n+1}$ et la viscosité par la loi de Sutherland : $\mu^{n+1} = (T^{n+1})^{0.75}$.

Schéma semi-implicite d'Adams-Bashforth/Crank-Nicolson

La différence par rapport au schéma précédent vient du traitement des termes diffusifs par un schéma semi-implicite de Crank-Nicolson. Les équations de quantité de mouvement seront résolues suivant la discrétisation suivante :

$$\frac{\rho^{n+1}\hat{q}_c - \rho^n q_c^n}{\Delta t} = \left[\frac{3}{2} \mathcal{H}_c^n - \frac{1}{2} \mathcal{H}_c^{n-1} - \mathcal{G}_c p^n + \mathcal{A}_c \left(\mu^n \frac{\rho^{n+1}\hat{q}_c + \rho^n q_c^n}{2\rho^{n+1}} \right) \right] \quad (10)$$

Le système d'équations pour la variable $\Delta \rho \hat{q}_c = \rho^{n+1}\hat{q}_c - \rho^n q_c^n$ est inversé en utilisant une méthode de factorisation (ou ADI).

4 Résultats

Des simulations axisymétriques sont effectuées pour étudier l'effet de la masse volumique variable sur la formation et les caractéristiques de l'anneau tourbillonnaire généré par l'injection d'un fluide dans une ambiance au repos. Des températures d'injection différentes de celles du milieu ambiant sont considérées : jusqu'à $\alpha = 3$ pour le jet chaud et $\alpha = 1/3$ pour le jet froid.

Re	Pe	Sc	R_j/Θ_j	$Z_{max} \times R_{max}$	$n_\theta \times n_r \times n_z$	Δt
1000	750	750	20	7×3.5	$1 \times 126 \times 240$	5.10^{-3}

Tableau 1: Paramètres des simulations à faible nombre de Mach.

4.1 Champs de température

Sur la figure (1-a), les champs de température sont représentés à différents instants, pendant et après la phase d'injection, pour un jet fluide deux fois plus chaud que le milieu ambiant. La couche de mélange annulaire développée autour du jet chaud s'enroule pour former un tourbillon de tête qui grandit progressivement. Après l'arrêt de l'injection ($t > 4$), le fluide injecté plus visqueux se met à diffuser, suite à la différence de température avec le milieu ambiant d'où la diminution considérable de sa température. À partir de l'instant $t = 10$, on discerne une sorte de sillage qui se développe dans l'écoulement de traîne pour les deux grandeurs scalaires ρ et T , provoqué par la couche de vorticité négative générée sur le front de l'écoulement du jet chaud (voir aussi la figure 2). L'avancement du jet est quantifié en définissant la longueur de pénétration L_p par la position sur l'axe à laquelle la température est à moitié de la valeur maximale de $(T_j(t) - T_a)$. L'évolution en temps de L_p est montr e sur la figure (1-b).

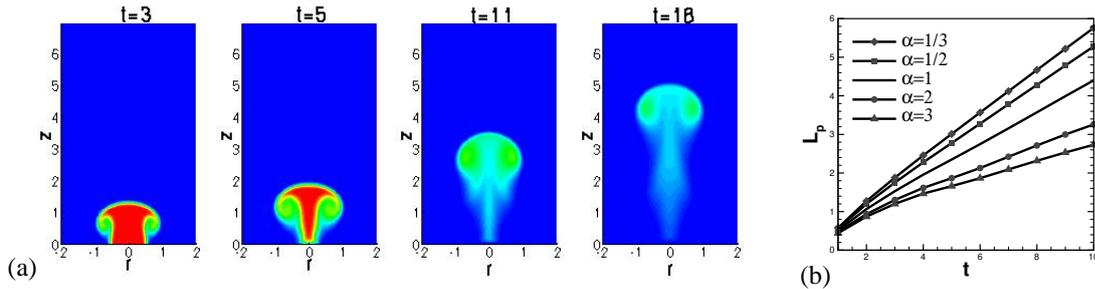


Figure 1: (a) Champs instantanés de température pour $\alpha = 2$, (b) longueur de pénétration du jet fluide pour différents rapports de températures α .

4.2 Vorticité

Les champs de vorticité sont représentés sur la figure (2) – les zones de vorticité négative sont marquées en pointillés. On compare les deux cas d’injection : fluide froid ($\alpha = 1/2$), fluide chaud ($\alpha = 2$) avec l’injection de fluide à température constante ($\alpha = 1$). La vorticité négative près de l’orifice pour les trois cas correspond à la formation d’un tourbillon d’arrêt, une fois l’injection stoppée. On distingue la présence d’un filament de vorticité négative au dessus du vortex de tête du jet chaud, dû à un cisaillement plus important ; pour le fluide froid le développement d’une saillie en tête du vortex est observée.

Plus le tourbillon se déplace en avant, plus il grandit par diffusion visqueuse en absorbant une partie de la couche cisillée de traîne.

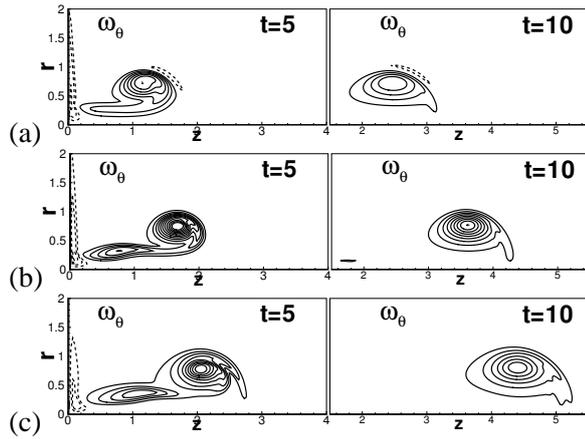


Figure 2: Champs instantanés de vorticité pour $\alpha = 2$ (a), $\alpha = 1$ (b), $\alpha = 1/2$ (c).

4.3 Caractéristiques du vortex

La circulation Γ mesurant l’intensité de la spirale du vortex et l’impulsion I_z décrivant la dynamique du tourbillon sont exprimées par :

$$\Gamma = \int_0^{L_z} \int_0^{R_{max}} \omega_\theta r dr dz, \quad I_z = \pi \int_0^{L_z} \int_0^{R_{max}} \rho r \omega_\theta r dr dz$$

Pour l’écoulement à masse volumique constante ($\alpha = 1$), l’évolution de la circulation totale (Γ) et celle du tourbillon (Γ_{VR}) sont en très bon accord avec les mesures expérimentales [2] et les résultats numériques [10] disponibles dans la littérature (voir figure (3)).

L’effet du rapport de températures est montré sur la figure (4-a). Après une croissance quasi-linéaire pendant la phase d’injection, la circulation diminue brusquement à $t=4$ (temps de fin d’injection); plus le fluide injecté est froid, plus ses valeurs sont importantes.

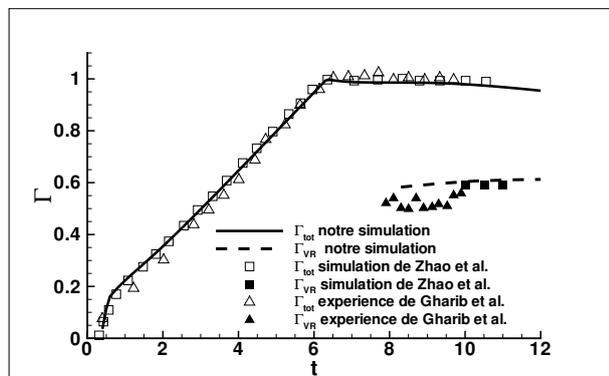


Figure 3: Comparaison de l’évolution de la circulation avec les résultats de [2] et [10].

La figure (4-b), montre l'évolution de l'impulsion hydrodynamique qui représente la quantité de mouvement du jet ; celle-ci a une évolution similaire à celle de la circulation en fonction du rapport de températures. Ses valeurs sont d'autant plus élevées que le fluide injecté est plus froid (plus dense). Comme l'impulsion dépend explicitement de la masse du fluide, l'influence du rapport α est plus marquée.

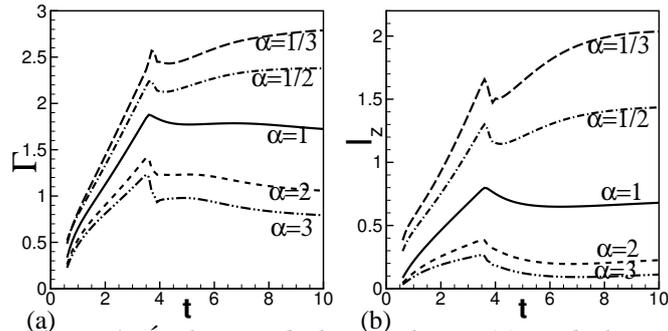


Figure 4: Évolutions de la circulation (a) et de l'impulsion du vortex (b).

La cinématique du vortex est décrite en déterminant le centroïde de l'anneau de vortacité défini par Helmholtz par son rayon R_v et sa position axiale Z_v :

$$R_v = \frac{\int_0^{L_z} \int_0^{R_{max}} \omega_\theta r dr dz}{\int_0^{L_z} \int_0^{R_{max}} \omega_\theta dr dz}$$

$$Z_v = \frac{\int_0^{L_z} \int_0^{R_{max}} \omega_\theta z r^2 dr dz}{\int_0^{L_z} \int_0^{R_{max}} \omega_\theta r^2 dr dz}$$

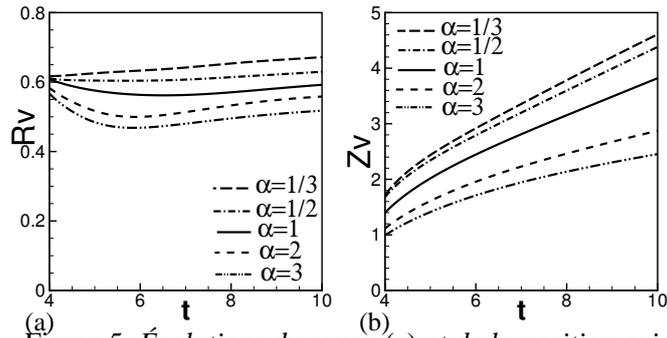


Figure 5: Évolutions du rayon (a) et de la position axiale du vortex (b) après l'arrêt de l'injection.

Les coordonnées R_v et Z_v du tourbillon, représentées sur la figure (5), ont des valeurs qui diminuent avec le rapport α . Les valeurs de R_v restent assez proches de la valeur du rayon du jet ($R_j = 0.5$). L'évolution de la position axiale est similaire à celle de la longueur de pénétration L_p .

5 Conclusion

Nous avons prouvé numériquement que le rapport de températures entre le jet et le milieu ambiant est un paramètre important qui peut modifier les caractéristiques (distribution de vortacité, circulation, impulsion) du tourbillon de tête qui se forme pendant l'injection. L'influence de ce paramètre sur d'autres caractéristiques d'intérêt pratique (l'entraînement de fluide ambiant, le détachement du tourbillon de son écoulement de traîne) sont en cours d'étude.

Références

- [1] A. Cook and J. Riley, Direct numerical simulations of a turbulent reactive plume on a parallel computer. *J. Comput. Phys.* 129, 263 (1996).
- [2] M. Gharib, E. Rambod and K. Shariff, A universal time scale for vortex ring formation. *J. Fluid Mech.* 360, 121 (1998).
- [3] S. James and C.K. Madnia, Direct numerical simulation of laminar vortex rings. *Phys. Fluids* 8(9) :2400-2414, (1996).
- [4] O.M Knio, P.S Worlikar and H.N Najm, in *Twenty-sixth Symposium (International) on combustion* (The combustion institute, 1996), p. 203.
- [5] A. Majda and J. Sethian, The Derivation and numerical solution of the equations for zero Mach number combustion. *Combustion Science and Technology* 42 :185-205 (1985).
- [6] P. McMurthy, W. Jou, J. Riley and R. Metcalfe, Direct numerical simulations of a reacting mixing layer with chemical heat release. *AIAA J.* 24(6), 962 (1986).
- [7] H.N Najm, P.S Wyckoff and O.M Knio, A semi-implicite numerical scheme for reacting flow. *J. Comput. Phys.* 143, 381 (1998).
- [8] F. Nicoud, Conservative high-order finite-difference schemes for low-Mach number flows. *J. Comput. Phys.* 158, 71-97 (2000).
- [9] K. Shariff and A. Leonard, Vortex rings. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 24, 235-279, 1992.
- [10] W. Zhao, S.H Frankel and L.G Mongeau, Effects of trailing jet instability on vortex ring formation. *Phys. Fluids.* 12, 3 (2000).