

# Méthodes d'ordre élevé pour la simulation numérique des phénomènes thermo-aérodynamique dans les armoires de télécommunications

R. Moglan<sup>1,2</sup>, I. Danaila<sup>1</sup>, S. Le Masson<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem, Université de Rouen, Avenue de l'Université, BP.12 Technopôle du Madrillet, 76801 Saint-Étienne-du-Rouvray

<sup>2</sup>France Telecom, 2 Avenue Pierre Marzin, BP 40, 22307 Lannion Cedex, France

**Résumé** Nous présentons un nouveau système numérique 3D pour la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles sous l'approximation de Boussinesq. La particularité du code est d'utiliser des méthodes d'ordre élevé : un schéma de Runge-Kutta à l'ordre trois pour l'intégration en temps et des différences finies à l'ordre six (schéma de Padé) pour la discrétisation spatiale. Le code est d'abord validé par rapport aux résultats existants pour la cavité rectangulaire, entraînée par un gradient de température vertical ou horizontal. Nous considérons ensuite le cas d'une armoire de télécommunications, modélisée sous la forme d'un domaine rectangulaire ; les composantes électroniques intérieures sont représentées sous la forme de domaines fictifs, en utilisant une méthode de type frontière immergée. Nous présentons des résultats pour plusieurs configurations, considérant un ou deux obstacles chauffés, placés différemment à l'intérieur de la cavité.

## Nomenclature :

L - dimension de la cavité (m)	$u, v, w$ - vitesses suivant $x, y, z$ ( $m \cdot s^{-1}$ )
$\vec{g}$ - accélération gravitationnelle ( $m \cdot s^{-2}$ )	T - température (K)
$\beta$ - coefficient de dilatation volumique	p - pression ( $N/m^2$ )
Re - nombre de Reynolds	Indices :
Ra - nombre de Rayleigh	$i, j, k$ - indices suivant $x, y, z$
Pr - nombre de Prandtl	ref - référence
Gr - nombre de Grashof	h - chaud
$\rho$ - masse volumique ( $kg \cdot m^{-3}$ )	c - froid
$x, y, z$ - coordonnées spatiales	

## 1 Introduction

Du fait de l'augmentation des débits et du déploiement des réseaux à haut débit, il devient nécessaire d'implanter des équipements actifs dans des armoires situées à l'extérieur. Leurs enveloppes sont soumises à des variations climatiques sévères, non maîtrisées. De plus, la chaleur produite par les composantes électroniques intérieures doit être évacuée, tout en conservant la température de l'air intérieur dans les limites prescrites par les normes ETSI. Par conséquent, la puissance qu'il est possible d'installer dans de telles armoires est limitée, ce qui réduit le nombre de clients connectés. Pour lever ce verrou, et pour limiter la consommation énergétique, une solution de refroidissement purement passive est généralement privilégiée.

Dans cette étude, nous abordons la problématique du refroidissement de ces dispositifs en simulant numériquement l'écoulement de l'air dans l'armoire. Nous présentons d'abord le nouveau système numérique développé pour la résolution des équations de Navier-Stokes 3D incompressibles

sous l'approximation de Boussinesq. L'originalité du code est d'utiliser des méthodes d'ordre élevé (trois en temps et six en espace) avec une formulation vitesse-pression. Les bénéfices de l'utilisation des méthodes d'ordre élevé sont évalués en comparant les résultats avec ceux obtenus par des schémas classiques pour les cas tests habituels (cavité carrée entraînée par un gradient de température vertical ou horizontal). Nous présentons ensuite la méthode de type frontière immergée utilisée pour la modélisation des composantes électroniques intérieures, ainsi que les résultats préliminaires obtenus pour ce type de configuration.

## 2 Modèle mathématique et système numérique

Nous considérons les équations de Navier-Stokes sous l'approximation de Boussinesq écrites sous la forme générale suivante :

- l'équation de continuité :  $\nabla \vec{u} = 0$ ,
- l'équation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} + \frac{Ra}{Re^2 Pr} T \vec{e}_z, \quad (2.1)$$

- l'équation d'évolution pour la température :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) T = \frac{1}{Re Pr} \nabla^2 T \quad (2.2)$$

Les variables ont été rendues sans dimension par rapport à un état de référence (générique) défini par  $L, V_{ref}, \rho_{ref}, p_{ref} = \rho_{ref} V_{ref}^2$ , avec un traitement particulier pour la température :  $T = (\tilde{T} - T_{ref}) / (T_h - T_c)$ . Par conséquent, les paramètres sans dimension (nombre de Reynolds, Prandtl, Grashof et Rayleigh) sont définis par :

$$Re = \frac{V_{ref} L}{\nu_{ref}}, \quad Pr = \frac{\nu_{ref} C p_{ref}}{\lambda_{ref}}, \quad Gr = \frac{g \beta (T_h - T_c) L^3}{\nu_{ref}^2}, \quad Ra = Pr Gr.$$

Pour le cas particulier de la convection naturelle dans une cavité, la vitesse  $V_{ref}$  sera choisie pour relier les nombres sans dimension par la relation classique  $Ra = Re^2 Pr$ , i.e.  $Gr = Re^2$ .

L'intégration en temps du système d'équations utilise une méthode de projection à pas de temps fractionné, basée sur un schéma explicite de Runge-Kutta à l'ordre trois, en trois pas. Pour chaque pas ( $l = 1, 2, 3$ ), l'équation de quantité de mouvement est avancée, avec un traitement explicite de la pression :

$$\frac{u_* - u_l}{\delta t} = a_l \mathcal{H}_l + b_l \mathcal{H}_{l-1} - c_l \nabla p^l, \quad (2.3)$$

où  $\mathcal{H}$  regroupe les termes convectifs, diffusifs et de flotabilité ; les constantes du schéma sont données par (Kim and Moin, 1985) :

$$a_1 = \frac{8}{15}, a_2 = \frac{5}{12}, a_3 = \frac{3}{4}, b_1 = 0, b_2 = -\frac{17}{60}, b_3 = -\frac{5}{12}, c_1 = \frac{8}{15}, c_2 = \frac{2}{15}, c_3 = \frac{1}{3},$$

Remarquons que  $b_1 = 0$ , ce qui permet de démarrer la procédure d'intégration sans stocker l'état précédent. Un schéma explicite d'Adams-Bashforth (à l'ordre deux) a été également implémenté. Le champ de vitesse non-solénoïdal  $u^*$  est ensuite corrigé par l'intermédiaire d'une équation de Poisson :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c_l \delta t} \nabla u^*, \quad u^{n+1} = u^* - (c_l \delta t) \nabla \Phi. \quad (2.4)$$

La résolution de l'équation de Poisson est généralement le point névralgique d'un code utilisant une méthode de projection et des algorithmes rapides et efficaces sont nécessaires. Nous utilisons une méthode de résolution optimisée, basée sur une décomposition en série de cosinus suivant la direction  $x$ , suivie d'une méthode de réduction cyclique pour résoudre le système résultant (suivant les directions  $y$  et  $z$ ).

Une attention particulière a été accordée à la résolution de l'équation d'évolution de la température. Pour éviter les oscillations au voisinage de forts gradients de température, les termes convectifs de l'équation sont traités par le schéma à variation totale décroissante (TVD) développé par [Vreugenhil and Koren \(1993\)](#) pour des problèmes de combustion.

Pour la discrétisation spatiale, nous utilisons une méthode de différences finies sur un maillage cartésien décalé, avec les vitesses discrétisées sur les faces de la cellule et les quantités scalaires (pression et température) au milieu (fig. 1a). Le maillage peut être uniforme ou variable, avec une accumulation des points de calcul au voisinage des parois (fig. 1b). Un schéma classique aux différences finies centrées à l'ordre deux a été implémenté pour les deux types de maillage. Pour le maillage uniforme, le schéma implicite de Padé a été utilisé pour estimer les dérivées à l'ordre six ([Lele, 1992](#)). Ce schéma a l'avantage d'avoir un comportement proche des schémas spectraux, sans introduire de diffusion numérique, et nécessite seulement l'inversion d'un système linéaire à matrice tri-diagonale.

L'utilisation des schémas d'ordre élevé est une originalité de ce nouveau code, utilisant la formulation vitesse-pression. Un schéma compact à l'ordre quatre en espace a été utilisé récemment dans [Ghader et al. \(2011\)](#) pour une formulation vorticité-fonction de courant du système Navier-Stokes-Boussinesq.

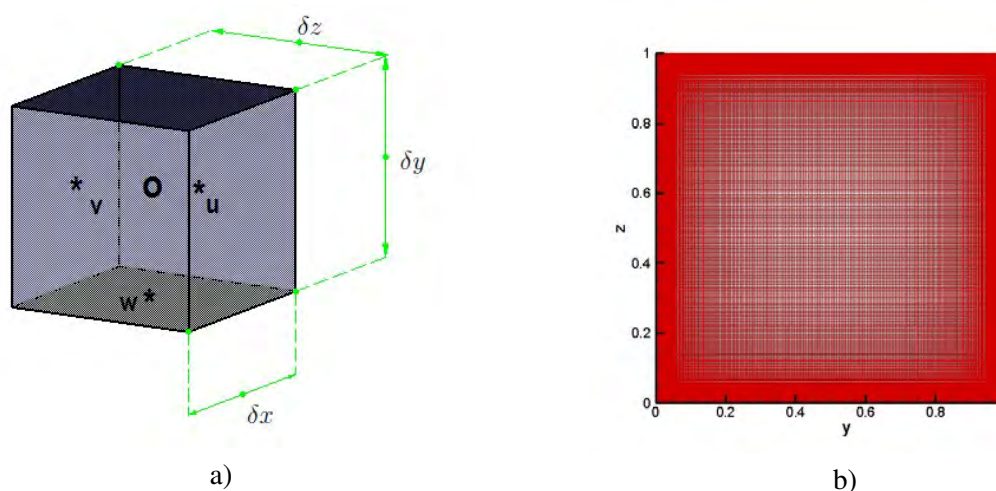


FIGURE 1 – Cellule de calcul avec une discrétisation décalé des vitesses et de la pression (a) et structure du maillage variable.

### 3 Résultats

Le code numérique est d'abord validé par rapport aux résultats existants dans la littérature pour la cavité rectangulaire, entraînée par un gradient de température vertical (e.g. [Ouertatani et al., 2008](#)) ou horizontal (e.g. [Wakashima and Saitoh, 2004](#)). Nous présentons dans cette communication seulement les résultats obtenus pour la cavité bidimensionnelle. Les conditions aux limites pour chaque cas test sont indiquées sur la figure 2

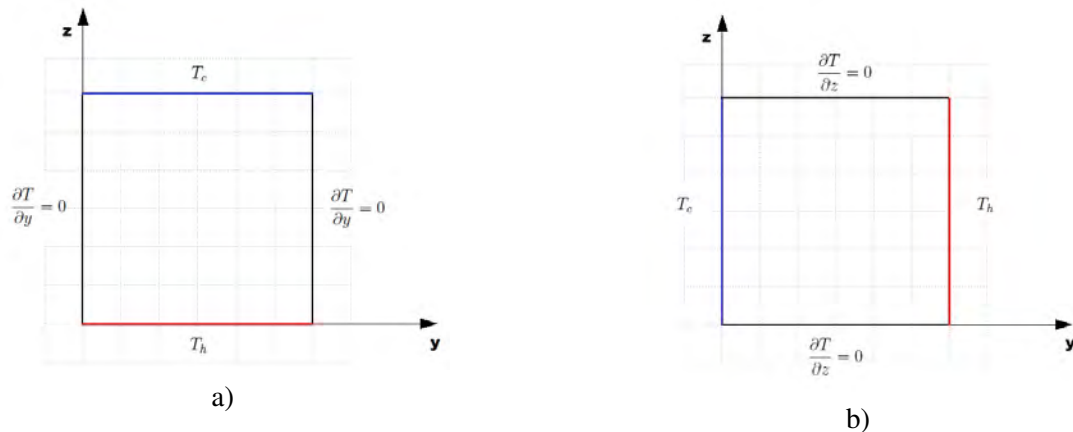


FIGURE 2 – Représentation schématique du problème de la cavité rectangulaire 2D entraînée par un gradient de température vertical (a) et horizontal (b).

Pour la cavité carrée avec gradient de température vertical, les calculs sont effectués pour un nombre de Prandtl fixe,  $Pr = 0.71$ , et plusieurs valeurs du nombre de Rayleigh,  $Ra = 10^6, 10^5, 10^4$ . Plusieurs résolutions spatiales, de  $64^2$  à  $512^2$  points de calcul, ont été considérées pour construire des maillages uniformes ou resserrés à la paroi. Comme la température de référence est prise comme  $T_{ref} = (T_h + T_c)/2$ , les conditions aux limites de type Dirichlet sont imposées comme  $T = 0.5$  sur la paroi chaude et  $T = -0.5$  sur la paroi froide. La condition initiale considère  $T = 0$  partout ; pour accélérer la formation de la cellule de convection, deux parois opposées sont entraînées avec des vitesses opposées pendant un temps très court au début de la simulation. L'état stationnaire est considéré comme atteint quand la variation en norme euclidienne des variables d'état est inférieure à  $10^{-7}$  d'un pas de temps à l'autre.

Les profils pour la vitesse verticale et, respectivement, horizontale suivant les lignes médianes de la cavité sont représentés sur la figure 3, ainsi que le nombre de Nusselt ( $Nu$ ) calculé au voisinage de la paroi chaude. Un très bon accord quantitatif avec les résultats récents de [Ouertatani et al. \(2008\)](#) est obtenu. Le même type de diagnostic quantitatif a été fait pour le cas de la cavité entraînée par un gradient horizontal et un bon accord avec les résultats de [Wakashima and Saitoh \(2004\)](#) a été obtenu.

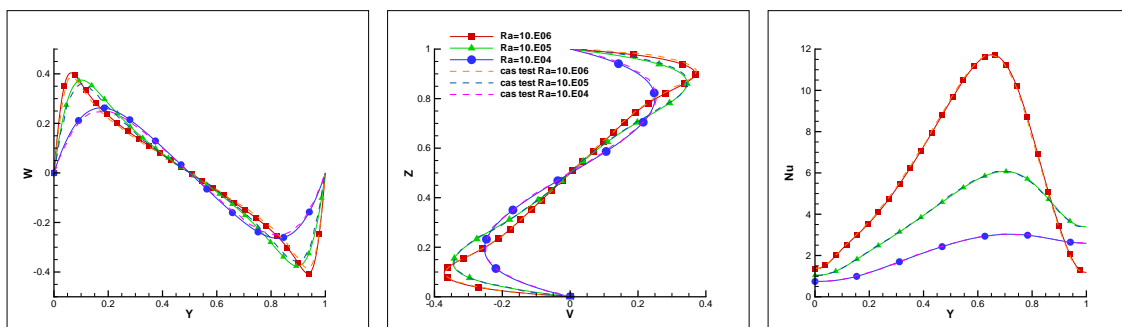


FIGURE 3 – Cavité carrée entraînée par un gradient de température vertical. Profils des vitesses verticale ( $W$ ) et horizontale ( $V$ ) suivant les lignes médianes de la cavité et variation du nombre de Nusselt ( $Nu$ ) au voisinage de la paroi chaude. Comparaison avec les résultats de [Ouertatani et al. \(2008\)](#) (lignes en pointillé).

Pour les deux types de cavité entraînée, les lignes de courant à la convergence et le champ de température correspondant sont présentés sur la figure 4. Un bon accord qualitatif avec les résultats de [Ouertatani et al. \(2008\)](#) et, respectivement, [Wakashima and Saitoh \(2004\)](#) est obtenu, avec une meilleure résolution des structures dans les coins de la cavité.

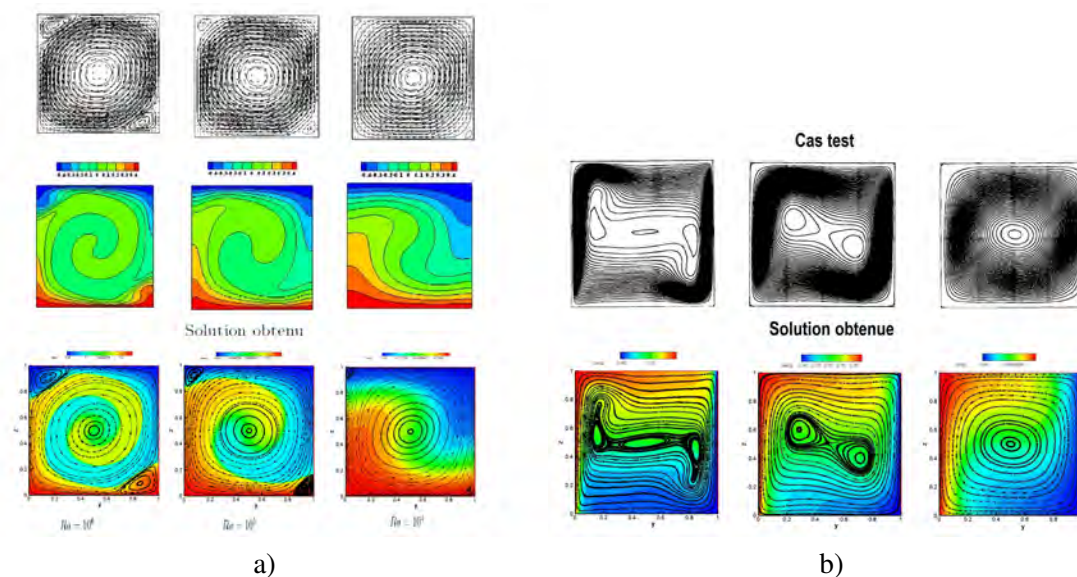


FIGURE 4 – Cavité carrée entraînée par un gradient de température vertical (a) ou horizontal (b). Lignes de courant et champ de température pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh. Pour référence, les résultats de [Ouertatani et al. \(2008\)](#) (a) et [Wakashima and Saitoh \(2004\)](#) (b) sont montrés en haut de chaque figure.

Une comparaison extensive entre les résultats obtenus avec les schémas à l'ordre deux (maillage constant ou variable) et le schéma compact à l'ordre six (maillage constant) a été également effectuée. Plusieurs types de maillage et schémas d'intégration en temps ont été considérés. Nous avons conclu que le système numérique optimal est celui utilisant le schéma compact à l'ordre six pour la discrétisation spatiale et le schéma de Runge-Kutta à l'ordre trois pour l'intégration en temps. Pour un temps de calcul supplémentaire de seulement 15% par rapport au schéma à l'ordre deux, le schéma compact permet une meilleure résolution et, par conséquent, de réduire la densité des points de calcul. Par exemple, le résultat obtenu sur un maillage raffiné de  $512^2$  points avec les schémas à l'ordre deux est retrouvé quasiment à l'identique par le schéma à l'ordre six sur un maillage de  $128^2$  points. De plus, le schéma à l'ordre six utilise un maillage à pas constant, ce qui permet d'optimiser les algorithmes de résolution.

Après sa validation, le système numérique a été évolué pour modéliser les armoires de télécommunications, vues comme des domaines rectangulaires avec des parois isothermes ou adiabatiques. Les équipements électroniques intérieurs sont représentés sous la forme d'obstacles rectangulaires (chauds ou froids), modélisés par une méthode de type frontière immergée. Nous présentons ici les résultats obtenus avec la méthode proposée par [Mohd-Yosuf \(1997\)](#) qui a l'avantage d'être très simple à implémenter et de garder les performances du code initial. Dans cette méthode, on calcule une force volumique ( $\vec{f}$ ) qui est introduite dans les équations de Navier-Stokes comme terme source de forçage. Le champ vectoriel ( $\vec{f}$ ) agit seulement à l'intérieur de l'obstacle ; il est calculé à partir d'une vitesse  $\vec{V}_b$  imposée sur le contour du corps solide ( $\vec{V}_b = 0$  pour un obstacle fixe). Cette méthode (parfois appelée *body-force method*) a été utilisée sous différentes formes dans la littérature (pour un article de revue, voir [Mittal and Iaccarino, 2005](#)).

Nous montrons sur la figure 5 quelques exemples de calculs de la cavité entraînée ou non par un gradient de température, comme précédemment, mais avec des obstacles isothermes à l'intérieur. Les recirculations induites par les obstacles sont correctement représentées par la méthode de frontière immergée. Le temps de calcul supplémentaire introduit pour prendre en compte les obstacles est négligeable pour ces calculs bidimensionnels.

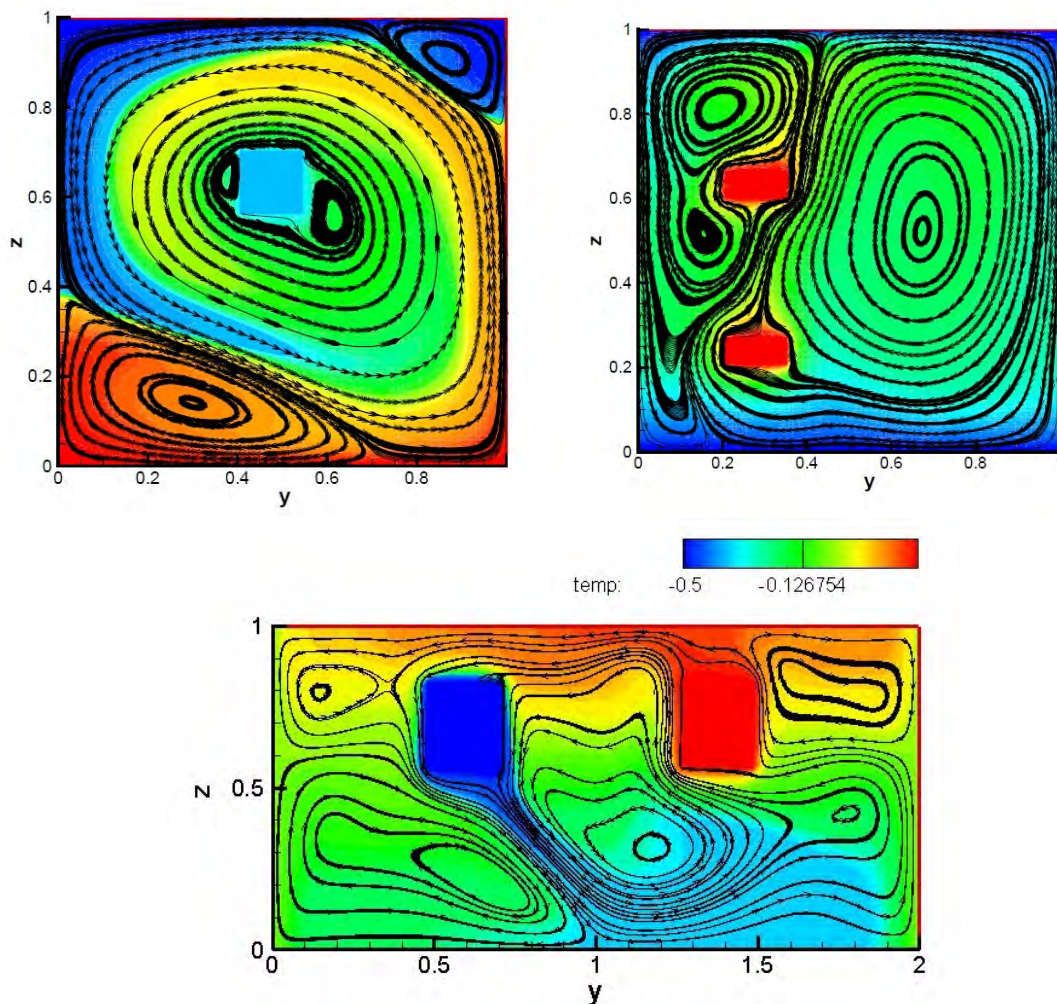


FIGURE 5 – Calculs de la cavité avec des obstacles isothermes à l'intérieur : lignes de courant et champ de température. (a) Cavité entraînée par un gradient de température vertical avec un obstacle froid ; (b) Cavité entraînée par la température de deux obstacles chauds, l'un au-dessus de l'autre ; (c) Cavité entraînée par la température d'un obstacle froid à côté d'un obstacle chaud.

## 4 Conclusions

Nous avons développé un nouveau système numérique 3D pour la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles sous l'approximation de Boussinesq. L'originalité du code est d'utiliser des méthodes d'ordre élevé pour une formulation vitesse-pressure : un schéma de Runge-Kutta à l'ordre trois l'intégration en temps et un schéma aux différences finies à l'ordre six (schéma

de Padé) pour la discrétisation spatiale. L'équation de correction pour la pression est résolue par un solveur de Poisson optimisé (transformée en cosinus, suivie d'une réduction cyclique). Les termes convectifs dans l'équation de transport pour la température sont discrétisés par un schéma TVD, ce qui permet de capturer des gradients raides de température, tout en évitant les oscillations localisées.

Le code de calcul a été validé en utilisant le cas test de la cavité rectangulaire, entraînée par un gradient de température vertical ou horizontal. Nous avons exploré la structure 2D et 3D des cellules de convection et comparé nos résultats avec ceux disponibles dans la littérature. Un très bon accord a été obtenu. Nous avons mis en évidence les bénéfices de l'utilisation des schémas d'ordre élevé, en comparant les résultats avec les schémas classiques (e.g. différences finies à l'ordre deux sur maillage constant ou resserré).

L'implémentation de la méthode de la frontière immergée a permis de mettre en place une première approche pour modélisation d'une armoire de télécommunications. Les résultats obtenus pour la cavité rectangulaire avec des obstacles isothermes à l'intérieur montre que la méthode permet de calculer correctement les caractéristiques globales de l'écoulement. D'autres versions de la méthode de la frontière immergée seront implémentées afin d'avoir une meilleure résolution de la couche thermique au voisinage des obstacles. De cette manière, une comparaison quantitative avec les résultats expérimentaux pour des cas similaires (barreau chauffé par exemple) pourra être envisagée.

## Références

- S. Ghader, A. Ghasemi, M. R. Banazadeh and D. Mansoury.** High-order compact scheme for Boussinesq equations : implementation and numerical boundary condition issue. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2011. ISSN 1097-0363.
- J. Kim and P. Moin.** Application of a fractional step method to incompressible Navier–Stokes equations. *J. Comput. Physics*, 59 :308–323, 1985.
- Sanjiva K. Lele.** Compact Finite Differences Schemes with Spectral-like Resolution. *Comptes Rendus Mécanique*, 103(5) :16–42, 1992.
- R. Mittal and G. Iaccarino.** Immersed boundary method. 37 :239, 2005.
- J. Mohd-Yosuf.** Combined immersed boundary/B-spline methods for simulation of flow in complex geometries. *Annu. Res. Briefs, Cent. Turbul. Res.*, page 317, 1997.
- N. Ouertatani, N. Ben Cheikh, B. Ben Beya and T. Lili.** Numerical simulation of two-dimensional Rayleigh-Bénard convection in an enclosure. *Comptes Rendus Mécanique*, 336 (5) :464 – 470, 2008.
- C. B. Vreugenhil and B. Koren.** *Numerical methods for advection–diffusion problems*, volume 45. Vieweg, Braunschweig, 1993.
- S. Wakashima and T. S. Saitoh.** Benchmark solutions for natural convection in a cubic cavity using the high-order time-space method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47 (4) :853 – 864, 2004.